Zur Theorie der Wienerschen Operatoren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

ALBERT WEIBLE
aus Nürtingen

1937
Tübinger Handelsdruckerei Müller & Bass, Tübingen
Eugenstraße 40

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen.

Dekan: Prof. Dr. E. LEHMANN
Berichterstatter: Prof. Dr. E. KAMKE
Mitberichterstatter: Prof. Dr. K. KNOPP.

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juni 1937.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meinen Eltern!

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

§ 1. Darstellung von Funktionen beschränkter Ordnung durch verallgemeinerte Fourier-Integrale 6

§ 2. Der unvollständige Wienersche Operator $H(D_\alpha)$ 13

§ 3. Wienersche Operatoren 18

§ 4. Rechenregeln für Wienersche Operatoren und Beispiele . . 27

§ 5. Verallgemeinerte Wienersche Operatoren 34

Literaturverzeichnis 39

Einleitung.

Bei der Lösung linearer gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen hat sich gezeigt, daß man in weitem Maße mit den Differentiationssymbolen rechnen kann wie mit Zahlen- und Buchstabenausdrücken in der Algebra und so vielfach zu richtigen Lösungen der Differentialgleichungen gelangt [1]). Eine mathematisch einwandfreie Begründung dieser Operatorenrechnung ist schon verschiedentlich in Angriff genommen worden [2]). Einen außerordentlich allgemeinen Ansatz hat vor 12 Jahren Herr N. Wiener [3]) angegeben, und zwar stützt er sich dabei auf eine im wesentlichen von ihm entwickelte Theorie verallgemeinerter Fourier-Integrale. Dieser tiefliegende und interessante Ansatz ist jedoch in Einzelheiten nicht zu halten, insbesondere ist der Beweis des entscheidenden Existenzsatzes (vgl. § 3, Satz 5 dieser Arbeit) nicht einwandfrei, und der Satz selbst dürfte sich kaum in dem behaupteten Umfang aufrecht erhalten lassen. Weiter scheinen auch die für Anwendungen wichtigen, von Herrn Wiener nur skizzierten Angaben über die multiplikative Zusammensetzung von Operatoren nicht in dem behaupteten Umfang beweisbar zu sein.

Die vorliegende Arbeit soll die oben angedeuteten Probleme einer Lösung näher führen. Der entscheidende Existenzsatz (§ 3, Satz 5) hat sich dabei annähernd in dem von Herrn Wiener behaupteten Wortlaut beweisen lassen. Dagegen konnten Regeln über multiplikative Zusammensetzung von Operatoren nur unter stärkeren Einschränkungen bewiesen werden. Im ganzen ist die Darstellung Herrn Wieners nicht nur in formaler, sondern, weil notwendig, auch vielfach in sachlicher Hinsicht stark geändert worden (vgl. z. B. § 5 dieser Arbeit). Für Einzelheiten sei auf die

[1]) Vgl. z. B. Berg. Literaturangaben finden sich bei Wiener (1), 557—567 und Doetsch (2), insbesondere 238—240. (Die Zitate beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.)

[2]) Vgl. Doetsch (1), 1—30; (2), 238—251.

[3]) Wiener (1), 557—584.

Anmerkungen in der Arbeit selbst hingewiesen. Außerdem werden einige für die Anwendungen wichtige Beispiele mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln gegeben. Der allgemeine Darstellungssatz 1, an dessen Formulierung und Beweis nur wenig zu ändern war, wurde im Zusammenhang noch einmal dargestellt. Dagegen wurde auf die asymptotischen Entwicklungen und die von Herrn Wiener nur skizzierte Lösung der Telegraphengleichung nicht näher eingegangen.

§ 1. Darstellung von Funktionen beschränkter Ordnung durch verallgemeinerte Fourier-Integrale.

Unter einer Funktion der Klasse $L_p\,(a, b)$ $(p > 0;\ a = -\infty,\ b = +\infty$ zugelassen) wird eine reelle Funktion verstanden, die in dem Intervall (a, b) meßbar[4]) und für welche die p-te Potenz absolut integrierbar[4]) ist. Der absolute Betrag einer solchen Funktion ist bekanntlich ebenfalls integrierbar, falls $p \geqq 1$ und das Intervall (a, b) endlich ist. Unter einer Funktion $f(x)$ der Klasse $\mathfrak{K}_k$ $(k \geqq 0$, ganz) werde eine reelle Funktion verstanden, die über jedes endliche Intervall meßbar, quadratisch integrierbar und in jedem unbegrenzten Intervall, das den Punkt $x = 0$ nicht enthält, nach Division durch x^k absolut integrierbar ist[5]). Gehört $f(x)$ irgend einer Klasse $\mathfrak{K}_k$ an, so heißt $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$.

Es ist nicht zu erwarten, daß jede Funktion $f(x)$ der Klasse $\mathfrak{K}$ eine Darstellung[6]) durch ein Fourier-Integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi)\, d\xi \int e^{iu(\xi - x)}\, du$$

besitzt. Daher ersetzt Herr Wiener das innere Integral durch ein solches, das für $|u| \geqq \lambda + 1$ den Wert Null liefert, so daß das Doppelintegral von der darzustellenden Funktion nur Schwingungen etwa bis zur Frequenz $\lambda + 1$ liefert. Der Übergang zu der

[4]) Es wird hier stets der Lebesguesche Maß- und Integralbegriff benützt.

[5]) Herr Wiener fordert, daß $f(x) = O\,(|x|^k)$ für $|x| \to \infty$ ist. Bei dieser Voraussetzung stößt aber die Zusammensetzung von Operatoren (vgl. § 4, Satz 8) auf Schwierigkeiten, da $H(D) f(x)$ nur bis auf eine Menge vom Maß Null eindeutig definiert ist.

[6]) Ist bei einem Integral die untere (obere) Grenze nicht besonders angegeben, so soll sie $-\infty$ $(+\infty)$ sein.

vollständigen Darstellung der Funktion $f(x)$ erfolgt dann durch den „Limes im Mittel“ für $\lambda \to \infty$ [7]).

Im einzelnen wird so vorgegangen. Für gegebenes $\lambda > 0$ wird

$$F_\lambda(u) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |u| \leqq \lambda \\ \Phi(u-\lambda) & \text{„} \quad \lambda \leqq u \leqq \lambda+1 \\ \Phi(-u-\lambda) & \text{„} \quad -\lambda-1 \leqq u \leqq -\lambda \\ 0 & \text{„} \quad |u| \geqq \lambda+1 \end{cases}$$

gesetzt, dabei bedeutet $\Phi(u)$ irgend eine in $0 \leqq u \leqq 1$ definierte, monoton abnehmende, beliebig oft differenzierbare Funktion,

---

[7]) Gehören die Funktionen $g_n(x)$ zu $L_2(a, b)$ und ist

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \int_a^b |g_m(x) - g_n(x)|^2 \, dx = 0,$$

so heißt die Funktionenfolge $g_n(x)$ im quadratischen Mittel (über das Intervall (a, b)) konvergent (Titchmarsh, 386ff). Es gibt dann nach dem Satz von Rieß-Fischer eine im Intervall (a, b) im wesentlichen (d. h. abgesehen von einer Menge vom Maß Null) eindeutig bestimmte, quadratisch integrierbare Funktion, gegen welche die Funktionenfolge $g_n(x)$ im quadratischen Mittel konvergiert, d. h. für welche

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |g_n(x) - g(x)|^2 \, dx = 0$$

ist; $g(x)$ heißt der „Limes im Mittel“ der Funktionenfolge $g_n(x)$ über das Intervall (a, b), und man schreibt

$$g(x) = \text{l. m.}_{n \to \infty} g_n(x).$$

Wir werden mehrfach folgende Tatsachen benützen:

a) Ist $\text{l. m.}_{n \to \infty} f_n x = f(x)$ und gehört $g(x)$ zu $L_2(a, b)$, so existiert

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b (\text{l. m.}_{n \to \infty} f_n(x))\; g(x)\, dx,$$

da nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_a^b (f_n - f)\, g\, dx \right|^2 \leqq \int_a^b |f_n - f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx$$

ist.

b) Aus

$$\text{l. m.}_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{l. m.}_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)$$

folgt

$$\text{l. m.}_{n \to \infty} (f_n(x) + g_n(x)) = f(x) + g(x);$$

denn es ist

$$\int_a^b |(f_n - f) + (g_n - g)|^2 \, dx \leqq 2 \int_a^b |f_n - f|^2 \, dx + 2 \int_a^b |g_n - g|^2 \, dx.$$

für die

$$\Phi(0)=1 \qquad \Phi_{+}^{(n)}(0)=0$$
$$\Phi(1)=0 \qquad \Phi_{-}^{(n)}(1)=0 \qquad (n \geqq 1, \text{ ganz})$$

ist; zum Beispiel

$$\Phi(u)=\frac{\varrho(u)}{\varrho(0)}, \text{ wo } \varrho(u)=\int_{u}^{1} e^{\frac{1}{\xi(\xi-1)}} d\xi$$

ist. Die für alle reellen u definierte, gerade Funktion $F_\lambda(u)$, die außerhalb des Intervalls $|u| \leqq \lambda+1$ identisch verschwindet, stellt eine für alle u beliebig oft differenzierbare Funktion dar, die an den Enden des Intervalls $|u| \leqq \lambda+1$ samt ihren sämtlichen Ableitungen verschwindet.

Weiter wird die Hilfsfunktion

$$\Psi(\xi, \lambda)=\frac{1}{2\pi}\int F_\lambda(u)\, e^{iu\xi}\, du$$

der reellen Veränderlichen ξ eingeführt; diese ist in bezug auf ξ beliebig oft differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}\Psi(\xi, \lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\lambda+1} F_\lambda(u)\,(e^{iu\xi}+e^{-iu\xi})\, du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda} \cos u\xi\, du + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+1} \Phi(u-\lambda)\cos u\xi\, du \\ &= \frac{\sin \lambda\xi}{\pi\xi} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \Phi(u)\cos(u+\lambda)\xi\, du\,.\end{aligned}$$

Satz 1 (Darstellungssatz) [8]: Für jede Funktion $f(x)$ der Klasse $\mathfrak{K}$ konvergiert das Integral

$$(1)\quad f_\lambda(x)=\int f(\xi)\,\Psi(\xi-x, \lambda)\, d\xi=\int f(\xi)\, d\xi\,\frac{1}{2\pi}\int F_\lambda(u)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

gleichmäßig für alle $\lambda>0$ und alle x jedes festen endlichen Intervalls $|x| \leqq a$, und für jedes beliebige endliche Intervall $|x| \leqq a$ ist

$$(2)\qquad \underset{\lambda\to\infty}{\text{l. m.}}\, f_\lambda(x)=f(x)\,.$$

[8]) Wiener (1), 562—565.

Beweis: Für k-mal stetig differenzierbare Funktionen $F(u)$, $G(u)$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{-\lambda-1}^{\lambda+1} F(u)\, G^{(k)}(u)\, du = \Big[\sum_{\mu=1}^{k} (-1)^{\mu-1} F^{(\mu-1)}(u)\, G^{(k-\mu)}(u) \Big]_{-\lambda-1}^{\lambda+1} + (-1)^k \int_{-\lambda-1}^{\lambda+1} F^{(k)}(u)\, G(u)\, du\,,$$

also wegen

$F_\lambda(u) = F_\lambda(-u)$ und $F_\lambda^{(\mu)}(\lambda+1) = F_\lambda^{(\mu)}(-\lambda-1) = 0$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$

für $\xi - x \neq 0$ und ganzes $k \geqq 1$

$$\Phi(\xi - x, \lambda) = \frac{(-i)^k}{2\pi(\xi-x)^k} \int F_\lambda(u) \frac{d^k}{du^k} (e^{iu(\xi-x)})\, du$$

$$= \frac{i^k}{2\pi(\xi-x)^k} \int_{-\lambda-1}^{\lambda+1} F_\lambda^{(k)}(u)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

$$= \frac{i^k}{\pi(\xi-x)^k} \int_0^1 \Phi^{(k)}(u) \cos(u+\lambda)(\xi-x)\, du\,. \tag{3}$$

Es ist also für alle $\xi \geqq 2a$ und alle $\lambda > 0$

$$|f(\xi)\, \Phi(\xi - x, \lambda)| \leqq \frac{|f(\xi)|}{\pi(\xi - |x|)^k} \int_0^1 |\Phi^{(k)}(u)|\, du$$

$$\leqq \frac{2^k |f(\xi)|}{\pi \xi^k} \int_0^1 |\Phi^{(k)}(u)|\, du\,,$$

und daraus folgt die behauptete gleichmäßige Konvergenz, da $f(x)$ zu einer Klasse $\mathfrak{K}_k$ gehört.

Es bleibt also noch (2) zu beweisen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (1) folgt, daß $f_\lambda(x)$ stetig [9]) ist, also insbesondere zur Klasse $L_2(-a, a)$ gehört. Es bleibt also nur noch für jedes $a > 0$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-a}^{a} |f_\lambda(x) - f(x)|^2\, dx = 0 \tag{2a}$$

[9]) Die Funktionen $f_\lambda(x)$ sind sogar für alle x beliebig oft differenzierbar; vgl. § 2, Satz 2.

zu beweisen. Für beliebiges $A > 0$ ist auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{-a}^{a} |f_\lambda(x) - f(x)|^2 \, dx \leqq 2 \int_{-a}^{a} dx \left| \int_{-A}^{A} f(\xi) \, \Psi(\xi - x, \lambda) \, d\xi - f(x) \right|^2$$

$$+ 2 \int_{-a}^{a} dx \left| \left[\int^{-A} + \int_{A} \right] f(\xi) \, \Psi(\xi - x, \lambda) \, d\xi \right|^2 .$$

Wegen der vorher bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von (1) gibt es zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $A \geqq 2a > 0$, so daß der letzte Teil $< \varepsilon$ ist. Damit ist die Behauptung (2a) auf die für beliebige $A \geqq 2a > 0$ zu beweisende Gleichung

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-a}^{a} dx \left| \int_{-A}^{A} f(\xi) \, \Psi(\xi - x, \lambda) \, d\xi - f(x) \right|^2 = 0 \tag{4}$$

zurückgeführt. Zum Beweis dieser Aussage wird unter anderem Plancherels Satz herangezogen. Für seine Anwendung wird

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } |x| \leqq A \\ 0 & \text{„ } |x| > A \end{cases}$$

gesetzt. Dann gehört $g(x)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$, und die Behauptung (4) läßt sich daher durch die etwas schärfere, für uns aber angenehmere

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int dx \left| \int g(\xi) \, \Psi(\xi - x, \lambda) \, d\xi - g(x) \right|^2 = 0 \tag{5}$$

ersetzen, wobei natürlich auch die Konvergenz des äußeren Integrals zu beweisen ist.

Zunächst wird das innere Integral umgeformt. Da $g(x)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört, existiert nach Plancherels Satz [10]) die Funktion

$$\varphi(\xi) = \text{l. m.}_{B \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^{B} g(x) \, e^{-i\xi x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} g(x) \, e^{-i\xi x} \, dx \tag{6}$$ [11])

für $-\infty < \xi < +\infty$ und gehört zu $L_2(-\infty, \infty)$. Umgekehrt ist

[10]) Wiener (2), 69—71.

[11]) Titchmarsh, 390. Ex. (iii).

$$g(x) = \text{l. m.}_{B\to\infty} \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta . \tag{7}$$

Daraus folgt [7])

$$\int g(\xi)\, \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left[\text{l. m.}_{B\to\infty} \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta \right] \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left\{ \lim_{B\to\infty} \int_{-a}^{a} \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta \right\}. \tag{8}$$

Diese beiden Limites lassen sich aber vertauschen. Da nämlich wegen (3) bei festem $|x| \leqq a$

$$\int \left| \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, e^{i\eta\xi} \right| d\xi$$

gleichmäßig für $|\eta| \leqq B$ konvergiert, ist [12])

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta$$

$$= \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, d\eta \int \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, e^{i\eta\xi}\, d\xi .$$

Wird hier $\xi - x = v$ gesetzt, so erhält man

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \Psi(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta$$

$$= \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, d\eta \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta(x+v)}\, dv \int F_\lambda(u)\, e^{iuv}\, du$$

$$= \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\eta x}\, d\eta \left(\frac{1}{2\pi} \int dv \int F_\lambda(u)\, e^{iv(u+\eta)}\, du \right)$$

$$= \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{ix\eta} F_\lambda(-\eta)\, d\eta = \int_{-B}^{B} F_\lambda(\eta)\, \varphi(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta \tag{8a}$$

[12]) Titchmarsh, 390, 12.6; 53, 1.84.

auf Grund der Fourierschen Integralformel [13]). Da der Integrand des letzten Integrals für $|\eta| \geqq \lambda + 1$ verschwindet, ist also

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \Psi(\xi - x, \lambda)\, d\xi \int_{-B}^{B} \varphi(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta$$

gleichmäßig für alle $B \geqq \lambda + 1$ vorhanden und daher folgt [13a]) aus (8) und (8a) in der Tat

$$(9) \qquad \int g \Psi\, d\xi = \lim_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} F_\lambda(\iota)\, \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota = \int F_\lambda(\iota)\, \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota .$$

Weiter ergibt sich aus (9) und (7) für den Integranden des äußeren Integrals in (5)

$$\int g(\xi)\, \Psi(\xi - x, \lambda)\, d\xi - g(x)$$

$$= \lim_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} F_\lambda(\iota)\, \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota - \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota$$

$$= \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} F_\lambda(\iota)\, \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota \; ^{11}) - \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} \varphi(\iota)\, e^{ix\eta}\, d\iota$$

$$= \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} (1 - F_\lambda(\eta))\, \varphi(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta \; ^{7}).$$

Die Behauptung (5) besagt somit

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int dx \left| \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} (1 - F_\lambda(\eta))\, \varphi(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta \right|^2 = 0 .$$

Dies kann aber aus dem Parsevalschen Satz [14]) gefolgert werden. Nach diesem Satz ist nämlich

[13]) Bochner, 42, Satz 11 b.
[13a]) London, 338; 352.
[14]) Wiener (2), 69 (8.05).

$$(10)\qquad \int dx \left| \operatorname*{l.\,m.}_{B\to\infty} \int_{-B}^{B} (1 - F_\lambda(\eta))\, \varphi(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta \right|^2$$

$$= 2\pi \int \left| (1 - F_\lambda(\eta))\, \varphi(\eta) \right|^2 d\eta$$

$$= 2\pi \left[\int_{-\infty}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\infty} \right] (1 - F_\lambda(\eta))^2 \, |\varphi(\eta)|^2 \, d\eta$$

$$\leq 2\pi \left[\int_{-\infty}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\infty} \right] |\varphi(\eta)|^2 \, d\eta ,$$

und diese beiden Integrale streben für $\lambda \to \infty$ gegen Null, da $\varphi(\eta)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 2. **Der unvollständige Wienersche Operator** $H(D_\lambda)$.

Satz 1 besagt, daß

$$\int f(\xi)\, \Psi(\xi - x, \lambda)\, d\xi \text{, d. h. } \int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

(durch einen passenden Limesprozeß) die Funktion $f(x)$ bestimmt. Kann man für dieses Integral die n-te Ableitung nach x so bilden, daß man unter dem Integralzeichen differenziert, so unterscheidet sich das entstehende Integral

$$\int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, (-iu)^n\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

von dem obigen nur durch den hinzugetretenen Faktor $(-iu)^n$. Es liegt daher nahe, dieses Integral (unter der Voraussetzung, daß es existiert) zur Definition (in einem noch näher festzulegenden Sinn) der Operation D^n an der Funktion $f(x)$ zu benützen, und allgemein

$$\int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

zur Definition der Operation $H(D) f(x)$. Dazu werden wir jedoch erst in § 3 gelangen. Der Vorbereitung dieser Definition gilt die Einführung eines noch von λ abhängenden Operators durch die

Definition 1: Ist $H(iu)$ bei gegebenem $\lambda > 0$ für alle reellen $|u| \leqq \lambda + 1$ beliebig oft differenzierbar [15]), so heißt $H(D_\lambda)$ ein unvollständiger Wienerscher Operator bei der Festsetzung, daß die Operation $H(D_\lambda)$, angewendet auf $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$, d. h. daß

$$(11) \qquad H(D_\lambda) f(x) = \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

sein soll.

Diese Definition gründet sich auf den folgenden

Satz 2: Für die in Definition 1 beschriebenen Funktionen $H(z)$ und die Funktionen $f(x)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}$ konvergiert bei festem $\lambda > 0$

$$(12) \qquad g(x; H, \lambda) = \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

gleichmäßig für alle x jedes beschränkten Intervalls. Die Funktion $g(x; H, \lambda)$ ist für alle x beliebig oft differenzierbar, und zwar ist

$$(13) \qquad \frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x; H, \lambda) = g(x; (-iu)^n H, \lambda),$$

insbesondere ist also

$$(14) \qquad (f_\lambda(x))^{(n)} = \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, (-iu)^n\, e^{in(\xi - x)}\, du = (D_\lambda)^n f\,.$$

Beweis: Die gleichmäßige Konvergenz von (12) für alle x in jedem beliebigen beschränkten Intervall bei festem $\lambda > 0$ ergibt sich ebenso wie bei dem entsprechenden Integral (1) in Satz 1; man hat nur $F_\lambda(u)$ durch $F_\lambda(u)\, H(-iu)$ zu ersetzen. Für den Beweis von (13) ist zu bemerken, daß für jedes $m > 0$ die in $0 \leqq \xi \leqq m$, $-a \leqq x \leqq a$ stetige Funktion

$$(15) \qquad G(\xi - x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

in diesem Bereich eine stetige partielle Ableitung nach x hat, da es sich um ein eigentliches Integral über harmlose Funktionen handelt. Da außerdem $f(\xi)$ zu $L_1(0, m)$ gehört, ergibt sich wie

[15]) Etwas angenehmer wäre die Voraussetzung: $H(z)$ regulär für $|z| < \lambda + 1$. Jedoch würde es auch schon für die Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}_k$ genügen, wenn $H(iu)$ für alle reellen $|u| \leqq \lambda + 1$ k-mal stetig differenzierbar ist.

bei dem entsprechenden Satz in der elementaren Analysis für jedes $m > 0$

$$\frac{d}{dx}\int_0^m f(\xi)\, G(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi = \int_0^m f(\xi)\, \frac{\partial}{\partial x} G(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi\,; \tag{16}$$

wegen der schon bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von (16) für $m \to \infty$ und alle x eines beliebigen beschränkten Intervalls folgt daher schließlich die Behauptung (13).

Aus der Definition 1 folgt insbesondere für $H(z) = z^n$, d. h. für den Operator $(D_\lambda)^n$ nach (14)

$$(D_\lambda)^n f(x) = (f_\lambda(x))^{(n)}\,. \tag{17}$$

Hierüber hinaus gilt der

Satz 3: Ist $f(x)$ n-mal differenzierbar, $f^{(n)}(x)$ eine Funktion aus der Klasse $\mathfrak{K}$, so gilt für die in Definition 1 beschriebenen Funktionen $H(z)$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(H(D_\lambda))\, f(x) = [H(D_\lambda)\,(D_\lambda)^n]\, f(x) \tag{18}$$

$$= \int f^{(n)}(\xi)\, G(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi = H(D_\lambda)\, f^{(n)}(x)\,,$$

und insbesondere

$$(f_\lambda(x))^{(n)} = (D_\lambda)^n f(x) = (f^{(n)}(x))_\lambda\,.$$

Beweis: Da die Funktion $f^{(n)}(x)$ einer Klasse $\mathfrak{K}_k$ angehört, gehören die Funktionen $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ sicher zu $\mathfrak{F}_{k+n-\nu}$ [16]), [17]), also sicher zu $\mathfrak{F}_{k+n}$. Hieraus folgt aber [17])

$$f^{(\nu)}(\xi) = o\,(|\xi|^{k+n}) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \text{ für } |\xi| \to \infty\,. \tag{19}$$

Durch n-malige partielle Integration ergibt sich nun aus (13)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} H(D_\lambda)\, f(x) = [H(D_\lambda)\ (D_\lambda)^n]\, f(x)$$

$$= (-1)^n \int f(\xi)\, \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} G(\xi - x,\ \lambda)\, d\xi$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n+\nu-1} f^{(\nu-1)}(\xi)\, \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial \xi^{n-\nu}} G(\xi - x,\ \lambda)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \int f^{(n)}(\xi)\, G(\xi - x, \lambda)\, d\xi\,,$$

[16]) Als Funktionenklasse $\mathfrak{F}_k$ bezeichnet Herr Bochner (S. 110) die Gesamtheit der Funktionen, die im Endlichen integrierbar und in jedem

und das ist der Inhalt unserer Behauptung; denn bei festem x folgt wie in Satz 1 [Gl. (3)], da auch in diesem Fall k beliebig ist,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} G(\xi - x;\, \lambda) = O(|\xi|^{-m})$$

bei $0 \leqq \nu \leqq m$, $m \geqq n + k$ und festem λ für $|\xi| \to \infty$, also wird wegen (19) die endliche Summe auf der rechten Seite der Gleichung (20) Null.

Schließlich gilt der

Satz 4 (Entwicklungssatz) [18]: Ist $f(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{K}$, $H(z)$ eine in dem Kreis $|z| \leqq \lambda + 1$ analytische Funktion, so konvergiert bei beliebigem $a > 0$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H^{(\nu)}(0)}{\nu!} (D_\lambda)^\nu f(x)$$

gleichmäßig für alle $|x| \leqq a$ und stellt dort den Wert $H(D_\lambda) f(x)$ dar.

Beweis: Die Behauptung besagt wegen (11) und (14), daß

$$(21)\quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \int f(\xi)\, d\xi \int F_\lambda(u) \left(H(-iu) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H^{(\nu)}(0)}{\nu!} (-iu)^\nu \right) e^{iu(x-\xi)}\, du \right\} = 0$$

gleichmäßig für alle $|x| \leqq a$ ist. Nun findet man für komplexwertige Funktionen wie im Reellen

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu + \frac{1}{n!} \int_0^z (z - \eta)^n H^{(n+1)}(\eta)\, d\eta$$

oder, wenn $z = -iu$ gesetzt wird,

$$H(-iu) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H^{(\nu)}(0)}{\nu!} (-iu)^\nu + \frac{1}{n!} \int_0^{-iu} (-iu - \eta)^n H^{(n+1)}(\eta)\, d\eta$$

$$(22)\qquad = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H^{(\nu)}(0)}{\nu!} (-iu)^\nu + \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \int_0^u (u - \eta)^n H^{(n+1)}(-i\eta)\, d\eta .$$

unendlichen Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält, nach Division durch x^k absolut integrierbar sind.

[17]) Bochner 119–121.

[18]) Vgl. Wiener (1), 570.

Setzt man zur Abkürzung

$$P_n(\xi, x) = \int e^{iu(\xi - x)} \left(F_\lambda(u) \frac{1}{n!} \int_0^u (u - \eta)^n H^{(n+1)}(-i\eta)\, d\eta \right) du,$$

so kann daher die Behauptung (21) ersetzt werden durch

$$\lim_{n \to \infty} \int f(\xi) P_n(\xi, x)\, d\xi = 0 \tag{23}$$

gleichmäßig für alle $|x| \leqq a$. Hierin wird das Integral aufgespalten in $\int_{}^{-2a} + \int_{2a}^{} + \int_{-2a}^{2a}$; weiter wird bei den beiden ersten Summanden der Integrand $P_n(\xi, x)$ k-mal partiell integriert. Da $F_\lambda^{(\mu)}(u) = 0$ für $|u| \geqq \lambda + 1$ ist, erhält die Behauptung (23) dadurch die Gestalt

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left[\int^{-2a} + \int_{2a} \right] \frac{f(\xi) Q_n(\xi, x)}{(\xi - x)^k}\, d\xi + \int_{-2a}^{2a} f(\xi) P_n(\xi, x)\, d\xi \right\} = 0 \tag{24}$$

mit

$$Q_n(\xi, x) = i^k \int e^{iu(\xi - x)} \frac{d^k}{du^k} \left(F_\lambda(u) \frac{1}{n!} \int_0^u (u - \eta)^n H^{(n+1)}(-i\eta)\, d\eta \right) du$$

$$= i^k \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} \int e^{iu(\xi - x)} F_\lambda^{(k-\mu)}(u)\, du \frac{1}{n - \mu!} \cdot \int_0^u (u - \eta)^{n-\mu} H^{(n+1)}(-i\eta)\, d\eta .$$

Nun ist

$$\left| \int^{-2a} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^k} \right| \leqq \int^{-2a} \frac{f(\xi)|\, d\xi}{(|\xi| - |x|)^k} \leqq 2^k \int^{-2a} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^k}\, d\xi ,$$

deshalb strebt das erste (und entsprechend das zweite) Integral in (24) gleichmäßig in x gegen Null, wenn

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(\xi, x) = 0 \text{ gleichmäßig für alle } |\xi| \geqq 2a, |x| \leqq a$$

ist. In der Tat ist aber

$$|Q_n(\xi, x)| \leqq \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k}{\mu} 2(\lambda+1) \operatorname*{Max}_{|u| \leq \lambda+1} \left| F_\lambda^{(k-\mu)}(u) \frac{1}{(n-\mu!)} \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^u (u-\eta)^{n-\mu} \frac{d^{n-\mu+1}}{d\eta^{n-\mu+1}} H^{(\mu)}(-i\eta)\, d\eta \right|$$

und dieser Ausdruck strebt gegen Null für $n \to \infty$, und zwar gleichmäßig für $|\xi| \geqq 2a$, $|x| \leqq a$, da $F_\lambda^{(\mu)}(u)$ in $|u| \leqq \lambda+1$ beschränkt und $H^{(\mu)}(z)$ für $|z| \leqq \lambda+1$ analytisch ist. Entsprechend ergibt sich schließlich $P_n(\xi, x) \to 0$ gleichmäßig in $|\xi| \leqq 2a$, $|x| \leqq a$ für $n \to \infty$, und daraus folgt die Behauptung auch für das dritte Integral in (24).

§ 3. **Wienersche Operatoren.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Definition des Wienerschen Operators schreiten.

Definition 2: Ist $H(z)$ für alle z auf der imaginären Achse beliebig oft[15]) differenzierbar und ist die Funktionenfolge $H(D_\lambda) f(x)$ $(\lambda \to \infty)$ für die Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{R}$ über jedes beliebige endliche Intervall im quadratischen Mittel konvergent, so heißt $H(D)$ ein Wienerscher Operator[19]) (W-Operator) bei der Festsetzung, daß die Operation $H(D)$ angewendet auf $f(x)$ gleich der durch den Satz von Rieß-Fischer[20]) im wesentlichen (d. h. bis auf eine Menge vom Maß Null auf der x-Achse) eindeutig bestimmten Funktion sein soll, gegen welche die Funktionenfolge $H(D_\lambda) f(x)$ im quadratischen Mittel über jedes beliebige endliche Intervall konvergiert; hierfür wird geschrieben

$$H(D) f(x) = \operatorname*{l.\,m.}_{\lambda \to \infty} H(D_\lambda) f(x).$$

Über den Umfang des Operatorenbereichs gibt der folgende grundlegende Existenzsatz Aufschluß.

[19]) Herr Wiener nennt diese Operatoren „nicht singulär" mit Rücksicht darauf, daß $H(z)$ auf der imaginären Achse keine singulären Stellen (im funktionentheoretischen Sinn) besitzen soll. Im Gegensatz dazu spricht er von „singulären Operatoren", wenn $H(z)$ auf der imaginären Achse (dem Integrationsweg) singuläre Stellen besitzt. Ich werde diese singulären Operatoren als verallgemeinerte Wienersche Operatoren bezeichnen (vgl. § 5).

[20]) Titchmarsh, 387 ff. Wiener (2), 27.

Satz 5 [21]**:** Ist

a) $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}_k$,
b) $H^{(n)}(iu)$ vorhanden für jedes $n \geqq 1$ und alle reellen u,
c) $H^{(n)}(iu) = O(1)$ für $|u| \to \infty$ $(n \geqq 0)$;
d) gehört $H^{(n)}(iu)$ bei passender Wahl eines $N \geqq k$ für alle [22] $n \geqq N$ zu $L_1(-\infty, \infty)$,

so ist $(H(D_\lambda) f(x)$ über jedes beliebige endliche Intervall im quadratischen Mittel konvergent.

Beweis [23]**:** Da $H(D_\lambda) f(x)$ nach Satz 2 für alle x (beliebig oft) differenzierbar ist, existiert bei beliebigem $a > 0$ das Integral

$$\int_{-a}^{a} \left| H(D_{\lambda_1}) f(x) - H(D_\lambda) f(x) \right|^2 dx$$

für alle λ_1, $\lambda > 0$. Die Behauptung ist daher bewiesen, falls sich nach Wahl eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\lambda_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß

[21]) Herr Wiener fordert in seiner Formulierung ((1), 568, 6. Zeile) sogar $H(iu) = O(1)$, $H^{(n)}(iu) = o(1)$ für $u \to \infty$ und alle ganzen $n \geqq 1$. Dagegen fehlt bei ihm die für die Anwendung nicht so wesentliche Voraussetzung d), die hier durch die Abschätzung (30) nötig wird. Verschwindet $f(x)$ außerhalb eines endlichen Intervalls identisch, so genügt es schon, wenn $H(iu) = O(1)$ für $u \to \infty$ und über jedes endliche Intervall quadratisch integrierbar ist (vgl. den Beweis zu Satz 5).

[22]) Die Voraussetzung d) wird mit Rücksicht auf Satz 8 für alle $n \geqq N \geqq k$ gefordert. Für den Existenzsatz 5 würde es schon genügen, wenn die Voraussetzung d) für mindestens ein $N \geqq k$ erfüllt ist.

[23]) Herrn Wieners Beweis für den von ihm formulierten Satz [21]) enthält wesentliche Lücken, und es ist nicht zu sehen, wie Herrn Wieners Beweismethode zum Ziele führen kann. Vor allem ist folgender Einwand zu machen: Herr Wiener behauptet durch Anwendung „einer leichten Ausdehnung des Plancherelschen Satzes verbunden mit der Schwarzschen Ungleichung" folge unter anderem (Wiener (1), 566, 7. 12. Zeile)

$$\left| \left[\int_{-\lambda_1 - 1}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda_1 + 1} \right] du \left(F_{\lambda_1}(u) - F_\lambda(u) \right) H(-iu) \int_{-1}^{1} f(x+\eta)\, e^{iu\eta}\, d\eta \right|^2$$

$$\leqq 2 \operatorname*{Max}_{|v| \geqq \lambda} |H(v)|^2 \cdot \left| \left[\int_{-\lambda_1 - 1}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda_1 + 1} \right] du \int_{-1}^{1} f(x+\eta)\, e^{iu\eta}\, d\eta \right|^2$$

für $\lambda_1 \geqq \lambda + 1 \geqq 1$. Diese Ungleichung ist aber schon für die Funktion $f(x) \equiv 1$ und $\lambda_1 = \lambda + 1$ falsch; denn wegen

$$\int_{-1}^{1} e^{iu\eta}\, d\eta = 2\, \frac{\sin u}{u}$$

$$(25) \qquad \int_{-a}^{a} \left| H(D_{\lambda_1}) f(x) - H(D_\lambda) f(x) \right|^2 dx \leqq \varepsilon$$

wird für alle $\lambda_1 \geqq \lambda \geqq \lambda_0(\varepsilon)$.

Wird

$$(26) \qquad K_{\lambda_1 \lambda}(u) = \frac{1}{2\pi} \Big(F_{\lambda_1}(u) - F_\lambda(u) \Big) H(-iu)$$

gesetzt, so ist nach (11)

$$\int_{-a}^{a} dx \left| H(D_{\lambda_1}) f(x) - H(D_\lambda) f(x) \right|^2$$

$$(27) \qquad = \int_{-a}^{a} dx \left| \int f(\xi)\, d\xi \int K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, e^{iu(\xi - x)}\, du \right|^2 .$$

Nach der Definition ist $K^{(\nu)}_{\lambda_1 \lambda}(u) = 0$ $(\nu \geqq 0)$ für $u \geqq \lambda_1 + 1$. Daher ergibt sich durch partielle Integration

$$\int K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, e^{iu(\xi - x)}\, du = \frac{i^N}{(\xi - x)^N} \int K^{(N)}_{\lambda_1 \lambda}(u)\, e^{iu(\xi - x)}\, du \quad (\xi - x \neq 0),$$

also nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für beliebiges $A \geqq 2a$

---

besagt dann die obige Ungleichung

$$(*) \quad \left| \Big[\int_{-\lambda - 2}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda + 2} \Big] \big(F_{\lambda + 2}(u) - F_\lambda(u) \big)\, H(-iu)\, \frac{\sin u}{u} \right|^2$$

$$\leqq \operatorname*{Max}_{|v| \geqq \lambda} |H(v)|^2 \cdot \left| \Big[\int_{-\lambda - 2}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda + 2} \Big] \frac{\sin u}{u}\, du \right|^2 ,$$

und diese Ungleichung ist nicht allgemein richtig; denn es läßt sich sicher ein $0 < \lambda < \pi$ so wählen, daß

$$\int_{\lambda}^{\lambda + 2} \frac{\sin u}{u}\, du = 0$$

und daher die rechte Seite von (*) Null wird. Halten wir nun dieses λ fest, so ist ein nicht singulärer Operator (in Herrn Wieners Sinn) so konstruierbar, daß die linke Seite in Ungleichung (*) positiv ausfällt. Es ist dies z. B. dadurch zu erreichen, daß man die in $|u| \leq \pi - \delta$ $(\delta = \pi - \lambda)$ gerade Funktion $H(iu) \equiv 1$ durch einen beiderseitigen „glockenförmigen" Ansatz der Breite δ (vgl. Definition von $\Phi(u)$, wo der Ansatz die Breite 1 hat) in die u-Achse fortsetzt.

$$\int dx \, | H(D_{\lambda_1}) f(x) - H(D_\lambda) f(x) |^2 \leqq 2 (I + II)$$

mit

$$I = \int_{-a}^{a} dx \left| \left[\int^{-A} + \int_{A} \right] f(\xi) \, d\xi \int K_{\lambda_1 \lambda}(u) \, e^{iu(\xi - x)} \, du \right|^2$$

(28)
$$= \int_{-a}^{a} dx \left| \left[\int^{-A} + \int_{A} \right] \frac{f(\xi) \, d\xi}{(\xi - x)^N} \int K_{\lambda_1 \lambda}^{(N)}(u) \, e^{iu(\xi - x)} \, du \right|^2,$$

$$II = \int_{-a}^{a} dx \left| \int_{-A}^{A} f(\xi) \, d\xi \int K_{\lambda_1 \lambda}(u) \, e^{iu(\xi - x)} du \right|^2.$$

Zunächst wird I abgeschätzt. Es ist, da $H^{(\nu)}(iu) = O(1)$ $(0 \leqq \nu \leqq N)$ und $(F_{\lambda_1} - F_\lambda)^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq N)$ meistens gleich Null ist,

$$2\pi \int K_{\lambda_1 \lambda}^{(N)}(u) \, e^{iu(\xi - x)} \, du$$

$$= \int \Big((F_{\lambda_1}(u) - F_\lambda(u)) \, H(-iu) \Big)^{(N)} e^{iu(\xi - x)} \, du$$

$$= O(1) + \int (F_{\lambda_1}(u) - F_\lambda(u)) \, H^{(N)}(-iu) \, e^{iu(\xi - x)} \, du,$$

und daraus folgt, da $H^{(N)}(iu)$ zu $L_1(-\infty, \infty)$ gehört,

(29)
$$\int K_{\lambda_1 \lambda}^{(N)}(u) \, e^{iu(\xi - x)} \, du = O(1)$$

für $\lambda_1 \geqq \lambda \to \infty$ gleichmäßig in ξ, x.

Nun gehört $f(\xi)$ zu $\mathfrak{K}_k$ also sicher zu $\mathfrak{F}_k$, daher ist nach (29) und wegen $A \geqq 2a > 0$

$$\left[\int^{-A} + \int_{A} \right] \frac{f(\xi) \, d\xi}{(\xi - x)^N} \int K_{\lambda_1 \lambda}^{(N)}(u) \, e^{iu(\xi - x)} \, du$$

$$= O(1) \left[\int^{-A} + \int_{A} \right] \frac{|f(\xi)| \, d\xi}{(|\xi| - |x|)^N}$$

(30)
$$= O(1) \left[\int^{-A} + \int_{A} \right] \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^N} d\xi.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es daher wegen $N \geqq k$ ein $A \geqq 2a > 0$, so daß

$$I \leqq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } \lambda_1 \geqq \lambda \geqq 1 \text{ und alle } |x| \leqq a$$

ist. Dieses A bleibt nun fest.

In *II* kann die Reihenfolge der Integrationen in den beiden inneren, eigentlichen Integralen vertauscht werden [12]). Wird noch wie bei Satz 1 die Hilfsfunktion

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{für } |\xi| \leqq A \\ 0 & \text{für } |\xi| > A \end{cases}$$

eingeführt, so ist

$$II = \int_{-a}^{a} dx \left| \int K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, e^{-iux}\, du \int g(\xi)\, e^{iu\xi}\, d\xi \right|^2.$$

Da $g(\xi)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört, existiert nach Plancherels Satz [10]) die Funktion

$$G(u) = \int g(\xi)\, e^{iu\xi}\, d\xi = \text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{-B}^{B} g(\xi)\, e^{iu\xi}\, d\xi \quad [11])$$

für alle u und gehört zu $L_2(-\infty, \infty)$. Daraus ergibt sich, da die Funktion $K_{\lambda_1 \lambda}(u)$ über jedes endliche Intervall quadratisch integrierbar ist und für $u \to \infty$ nach Voraussetzung c) beschränkt bleibt, daß auch die Funktion $K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört. Nach Plancherels Satz ist also die Funktion

$$\text{l. m.}_{B \to \infty} \int_{B}^{B} (K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u))\, e^{-iux}\, du = \int (K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u))\, e^{-iux}\, du,$$

die für alle x existiert, in der Klasse $L_2(-\infty, \infty)$ enthalten, und es gilt

$$\int dx \left| \int \left(K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u) \right) e^{iux}\, du \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int \left| K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u) \right|^2 du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\lambda_1}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\lambda_1 + 1} \right] |K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u|^2 d$$

Da die Funktion $K_{\lambda_1 \lambda}(u)\, G(u)$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört, folgt hier-

aus, daß es ein λ_0 gibt, so daß $II < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\lambda_1 \geqq \lambda \geqq \lambda_0$ (ε) ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Anschließend an den allgemeinen Existenzsatz 5 soll noch die Frage behandelt werden, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen der Wert des Operators $H(D)f(x)$ ohne Einschaltung des quadratischen Mittels unmittelbar durch ein Fourier-Integral gegeben werden kann. Ein hinreichendes Kriterium liefert

Satz 6: Ist

a) $H^{(n)}(-iu)$ vorhanden für alle ganzen $n \geqq 0$ und alle reellen u,

b) $H^{(n)}(-iu) = o(1)$ für $|u| \to \infty$ $(n \geqq 0)$;

c) gehören $H(-iu)$ und $H(-iu)\,\mathrm{Log}\,u$ zu $L_2(-\infty, \infty)$ und $H^{(N)}(-iu)$ zu $L_1(-\infty, \infty)$ für ein $N \geqq k$,

so existiert [24])

$$\int H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

bei festem x für fast alle ξ, und es gilt für $f(x)$ aus $\mathfrak{K}_k$

$$H(D)f(x) = \underset{\lambda \to \infty}{\text{l. m.}} H(D_\lambda) f(x) = \lim_{\lambda \to \infty} H(D_\lambda) f(x)$$
$$= \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du\,.$$

Beweis: Zunächst muß die Existenz des Integrals

$$\int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du \tag{31}$$

bewiesen werden. Da [25])

$$\int H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

bei festem x eine meßbare Funktion von ξ ist, braucht nur noch die Konvergenz des Integrals bewiesen werden. Durch partielle Integration ergibt sich wegen Vor. b)

---

[24]) Vgl. Hobson II, 750–752. Die dort bewiesenen Sätze lassen sich auch auf das „komplexe" Fourier-Integral

$$\int H(-iu)\, e^{iu\eta}\, du$$

übertragen.

[25]) Bochner, 209, 4–6. Titchmarsh, 331.

$$\int H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du = \frac{i^N}{(\xi-x)^N} \int H^{(N)}(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du \quad (\xi - x \neq 0).$$

Das rechts stehende Integral strebt bei festem x für $|\xi| \to \infty$ gegen Null [26]). Für $B \geqq A \geqq 2a > 0$ ist daher

$$\text{(31a)} \qquad \left[\int_{-B}^{-A} + \int_{A}^{B}\right] f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

$$= \frac{i^N}{2\pi}\left[\int_{-B}^{-A} + \int_{A}^{B}\right] \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi-x)^N} \int H^{(N)}(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du\,.$$

Da $f(x)$ zur Klasse $\mathfrak{K}_k$ gehört, konvergiert somit (31).

Die Behauptung ist daher bewiesen, wenn gezeigt wird

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi}\int H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du - H(D_\lambda) f(x)\right\}$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi}\int \Big(1 - F_\lambda(u)\Big) H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du = 0\,.$$

Das äußere Integral wird wieder aufgespalten in $\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{\infty}$.

Wird jetzt

$$K_\lambda(u) = \frac{1}{2\pi}\Big(1 - F_\lambda(u)\Big) H(-iu)$$

gesetzt, so ergibt sich (vgl. S. 21 f.) wegen $H(-iu) = o(1)$ wieder

$$\int K_\lambda(u)\, e^{iu(\xi-x)}\, du = \frac{i^N}{(\xi-x)^N}\int K_\lambda^{(N)}(u)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

$$= O(|\xi - x|^{-N}),$$

und daher folgt wie auf S. 22, daß nur noch

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-A}^{A} f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi}\int \Big(1 - F_\lambda(u)\Big) H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

zu beweisen ist. Da aber bei festem x

[26]) Bochner, 7, Satz 1.

$$\int H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du = \operatorname*{l.\,m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehört [24]), genügt es [7]) zu zeigen, daß bei festem x

$$\operatorname*{l.\,m.}_{\lambda\to\infty} \int \Big(1 - F_\lambda(u)\Big)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du = 0$$

d. h.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-A}^{A} d\xi \left| \int \Big(1 - F_\lambda(u)\Big)\, H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du \right|^2 = 0$$

ist. Wegen Vor. c) folgt aber unmittelbar aus (10) ($\eta = \xi - x$) sogar

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int d\eta \left| \int \Big(1 - F_\lambda(u)\Big)\, H(-iu)\, e^{iu\eta}\, du \right|^2 = 0\,.$$

In Satz 6 ist es gelungen, unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen den Wert eines W-Operators, der in Definition 2 durch den für die Anwendung ziemlich unbequemen Limes im Mittel definiert wurde, durch ein Fourier-Integral auszudrücken. Die Auswertung eines solchen Integrals macht aber unter Umständen noch erhebliche Schwierigkeiten. Weiß man jedoch, daß die Funktion $H(z)$ eine in der ganzen z-Ebene (eindeutige) analytische Funktion mit nur endlich vielen singulären Stellen außerhalb der imaginären Achse darstellt, so gibt bekanntlich, falls die Funktion $|H(z)|$ für $|z| \to \infty$ von gewisser Ordnung klein wird, der Residuensatz ein Mittel an die Hand, das Integral

$$\int H(-iu)\, e^{iu(\xi-x)}\, du$$

zu berechnen [27]). Im vorliegenden Fall ergibt sich

Satz 7: Ist $H(z)$ eine eindeutige und abgesehen von endlich vielen Stellen außerhalb der imaginären Achse reguläre Funktion, deren absuluter Betrag $O(r^{-\varepsilon})$ bei passendem $\varepsilon > 0$ für $|z| = r \to \infty$ ist, so ist

$$(32) \qquad \int H(-iu)\, e^{iu\alpha}\, du = \begin{cases} -2\pi \sum\limits_{\Re z > 0} \operatorname{Res}\,(H(z)\, e^{-\alpha z}) & \text{falls } \alpha > 0 \\ \\ 2\pi \sum\limits_{\Re z < 0} \operatorname{Res}\,(H(z)\, e^{-\alpha z}) & \text{falls } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

[27]) Vgl. Bochner, 53, 3.

Beweis: Zunächst sei $\alpha > 0$. Nach dem Residuensatz ist, wenn längs der imaginären Achse von ir nach $-ir$ und dann auf der rechten Hälfte des Kreises $|z| = r$, der schon alle singulären Stellen der Funktion $H(z)$ umschließen möge, integriert wird,

$$\int_{ir}^{-ir} H(z)\, e^{-\alpha z}\, dz + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(re^{i\varphi})\, re^{i\varphi}\, e^{-i\alpha r \sin\varphi}\, e^{-\alpha r \cos\varphi}\, d\varphi$$
$$= 2\pi i \sum_{\Re z > 0} \operatorname{Res} \left(H(z)\, e^{-\alpha z}\right).$$

Für das zweite Integral $J(r)$ der linken Seite gilt

$$|J(r)| \leqq r \max_{|z| = r,\ \Re z \geqq 0} |H(z)| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r \cos\varphi}\, d\varphi$$
$$= O(r^{1-\varepsilon}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r \cos\varphi}\, d\varphi;$$

wegen der Abschätzung

$$\cos\varphi \geqq \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) : \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{2\varphi}{\pi} \qquad \left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

folgt hieraus

$$|J(r)| = O(r^{1-\varepsilon}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right)}\, d\varphi$$
$$= O(r^{1-\varepsilon})\, e^{-\alpha r}\, \frac{\pi}{2\alpha r} \left(e^{\alpha r} - 1\right) = O(r^{-\varepsilon}) \left(1 - e^{-\alpha r}\right).$$

Dieser Ausdruck strebt für $r \to \infty$ gegen Null, womit der erste Teil der Behauptung, samt der Existenz des Integrals (32) bewiesen ist.

Der zweite Teil der Behauptung ($\alpha < 0$) folgt ganz analog. Man hat nur, da nun $\alpha < 0$ ist, die Integration längs der imaginären Achse von ir nach $-ir$ und dann über die linke Hälfte des Kreises $|z| = r$ zu erstrecken.

§ 4. Rechenregeln für W-Operatoren und Beispiele.

Ist $H(D)$ ein W-Operator, so gilt offenbar für Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ aus $\mathfrak{R}$

$$H(D)\,[f_1(x) + f_2(x)] = H(D)\,f_1(x) + H(D)\,f_2(x)$$

und für jede Konstante c

$$H(D)\,[cf(x)] = cH(D)\,[f(x)]\,.$$

Über die „Multiplikation" von Operatoren läßt sich folgendes sagen:

Satz 8: Erfüllen $H_1(D)$ und $H_2(D)$ die Voraussetzungen zu Satz 5, so ist auch $H_1 H_2(D)$ ein W-Operator; sind ferner mit $f(x)$ auch $H_1(D)f(x)$ und $H_2(D)f(x)$ Funktionen aus $\mathfrak{R}$ [28]), so gilt [29])

$$H_1(D)\,[H_2(D)f(x)] = H_2(D)\,[H_1(D)f(x)] = H_1 H_2(D)f(x)\,. \tag{33}$$

Beweis: Zunächst ist nachzuweisen, daß $H_1 H_2$ ein W-Operator ist. Das folgt aber, da mit H_1 und H_2 auch $H_1 H_2$ die Voraussetzungen b) und c) zu Satz 5 erfüllt, aus Satz 5, wenn auch noch d) gilt, d. h. wenn bei passender Wahl eines $N \geqq k$ für alle $n \geqq N$

$$(H_1 H_2)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} H_1^{(\nu)}\, H_2^{(n-\nu)}$$

zu $L_1(-\infty, \infty)$ gehört. Das ist aber nach Voraussetzung c) der Fall für alle $n \geqq N = 2$ Max (N_1, N_2), wo N_1 bezw. N_2 die zu H_1 bezw. H_2 gehörigen Zahlen N in Voraussetzung d) bedeuten;

---

[28]) Bei Herrn Wiener fehlt diese Voraussetzung. Er nimmt vielmehr bei seinem Beweis (Wiener (1), 568, 13.–17. Zeile) stillschweigend an, daß mit $f(x)$ auch $H_1(D)f(x)$ (und entsprechend $H_2(D)f(x)$) in der Klasse der zugelassenen Funktionen, hier also in der Klasse $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Das ist aber durch den Existenzsatz 5 nur dann gesichert, wenn $H_\nu(D)f(x)$ $(\nu = 1,2)$ nach Division durch ein x^k in jedem unbegrenzten Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält, absolut integrierbar ist, was zunächst nur für die Funktionen $H_\nu(D_\lambda)f(x)$ richtig ist (Bochner, 110, 116—117).

[29]) Ist einer der Operatoren D^n (erfüllt also dieser Operator nicht die Voraussetzung c) zu Satz 5), so wird unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$, auf welche der Operator D^n angewendet wird, eine entsprechende Multiplikationsregel formuliert (s. Gl. (36)).

denn es ist dann entweder ν oder $n-\nu \geqq N$ und daher gehört in jedem Summanden mindestens ein Faktor zu $L_1(-\infty, \infty)$, während der andere beschränkt ist.

Es bleibt also noch (33) zu beweisen. Wird zur Abkürzung (vgl. (15))

$$(33a) \quad G_\nu(\xi - x, \lambda_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int F_{\lambda_\nu}(u)\, H_\nu(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du \quad (\nu = 1,2)$$

gesetzt, so existiert für alle $\lambda_1 > 0$ nach Voraussetzung

$$H_1(D_{\lambda_1})[H_2(D) f(x)] = \int \underset{\lambda_2 \to \infty}{[\text{l. m. } H_2(D_{\lambda_2}) f(\xi)]}\, G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi$$

und daraus folgt [7])

$$H_1(D_{\lambda_1})[H_2(D) f(x)] = \lim_{A \to \infty}\left\{\lim_{\lambda_2 - \infty}\int_{-A}^{A}[H_2(D_{\lambda_2}) f(\xi)]\, G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi\right\}.$$

Diese beiden Limites lassen sich aber vertauschen. Dafür ist zunächst eine Vertauschung von Integralen zu rechtfertigen. Nach (11) und (33a) ist

$$\int G_1(\xi - x, \lambda_1)\ [H_2(D_{\lambda_2}) f(\xi)]\, d\xi = \int G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta.$$

Der Integrand $G_1(\xi - x, \lambda_1)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, f(\eta)$ stellt bei festem x eine meßbare Funktion über die ganze ξ, η-Ebene dar. Weiter ergibt sich durch partielle Integration

$$|G_1(\xi - x, \lambda_1)| \leqq \frac{C_1(\lambda_1)}{1 + |\xi - x|^N}$$

$$|G_2(\eta - \xi, \lambda_2)| \leqq \frac{C_2(\lambda_2)}{1 + |\eta - \xi|^{N+2}}$$

und daraus folgt [30]) die Existenz des Integrals

$$\int \frac{d\xi}{1 + |\xi - x|^N} \int \frac{|f(\eta)|\, d\eta}{1 + |\eta - \xi|^{N+2}}.$$

Es ist also nach einem Satz von Hobson [31]) der Integrand $G_1\, G_2\, f$

[30]) Bochner, 110, 116–117.
[31]) Hobson I, 631.

bei festem x über die ganze ξ, η-Ebene absolut integrierbar und daraus folgt nach den Fubinischen Sätzen [32])

$$\int G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta$$
$$= \int f(\eta)\, d\eta \int G_1(\xi - x, \lambda_1)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta$$
$$= \int f(\eta)\, d\eta \int G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \int F_{\lambda_1}(u)\, H_1(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

und da wegen der oben angeführten Abschätzung von G_2

$$\int G_2(\xi - x, \lambda_2)\, e^{iu(\xi - x)}\, d\xi$$

gleichmäßig in u existiert, lassen sich die beiden inneren Integrale in der letzten Gleichung vertauschen, und man erhält daher

$$\int G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta$$
$$(34) \qquad = \int f(\eta)\, d\eta \frac{1}{2\pi} \int F_{\lambda_1}(u)\, H_1(-iu)\, e^{-iux}\, du$$
$$\cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int d\xi \int F_{\lambda_2}(v)\, H_2(-iv)\, e^{iv\eta}\, e^{-i\xi(v-u)}\, dv \right).$$

Wird nun auf den Klammerausdruck in (34) des Fouriersche Integraltheorem angewendet [13]), so ergibt sich

$$\int G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta$$
$$= \int f(\eta)\, d\eta \frac{1}{2\pi} \int F_{\lambda_1}(u)\, H_1(-iu)\, e^{-iux} \left(F_{\lambda_2}(u)\, H_2(-iu)\, e^{iu\eta} \right)$$
$$(35) \qquad = \int f(\eta)\, d\eta \frac{1}{2\pi} \int F_{\lambda_1}(u)\, H_1(-iu)\, H_2(-iu)\, e^{iu(\eta - x)}\, du$$

für $\lambda_2 \geqq \lambda_1 + 1$, da $F_{\lambda_1} F_{\lambda_2} = F_{\lambda_1}$ für $\lambda_2 \geqq \lambda_1 + 1$ ist.
Daher ist nach (35)

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} G_1(\xi - x, \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi, \lambda_2)\, d\eta$$

gleichmäßig für alle $\lambda_2 \geqq \lambda_1 + 1$ vorhanden und es ist also [13a]) die oben angedeutete Limesvertauschung durchführbar. Es ergibt sich daher nach (35)

---

[32]) Hobson I, 627 ff. Bochner, 212, 10.

$$H_1(D_{\lambda_1})\,[H_2(D)\,f(x)]$$

$$= \lim_{\lambda_2 \to \infty} \left\{ \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} G_1(\xi - x,\ \lambda_1)\, d\xi \int f(\eta)\, G_2(\eta - \xi,\ \lambda_2)\, d\eta \right\} \tag{35 a}$$

$$= \int f(\eta)\, d\eta \frac{1}{2\pi} \int F_{\lambda_1}(u)\, H_1(-iu)\, H_2(-iu)\, e^{iu(\eta - x)}\, du\,.$$

Da aber $H_1 H_2(D)\,[f(x)]$ existiert, ist also

$$H_1(D)\,[H_2(D)\,f(x)] = H_1 H_2(D)\,f(x)\,.$$

Ganz analog folgt der zweite Teil der Gleichung (33), da ja auch $H_1(D)\,f(x)$ nach Voraussetzung eine Funktion aus $\mathfrak{R}$ darstellen soll. Sind also $H_1(D)\,f(x)$ und $H_2(D)\,f(x)$ Funktionen aus $\mathfrak{R}$, so sind die Operatoren vertauschbar.

Die eben bewiesene Multiplikationsregel ist insofern unbefriedigend, als in die Voraussetzung aufgenommen werden mußte, daß das Ergebnis des inneren Operators angewendet auf eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{R}$ wieder eine Funktion dieser Klasse darstellt. Unter schärferen Voraussetzungen über H kann dieser Teil der Voraussetzung gestrichen werden. Es gilt nämlich der

Zusatz: Erfüllt der W-Operator $H(D)$ die Voraussetzungen zu Satz 6 und gehören außerdem die Funktionen $H^{(\nu)}(-iu)$ $(\nu \geqq 0)$ zu $L_1(-\infty, \infty)$, so ist $H(D)\,f(x)$ sicher eine Funktion aus $\mathfrak{R}$; denn es ist nach Satz 6 und (31a)

$$H(D)\,f(x) = \frac{i^N}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{A} + \int_{A}^{\infty} \right] \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^N} \int H^{(N)}(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} f(\xi)\, d\xi \int H(-iu)\, e^{iu(\xi - x)}\, du\,,$$

und daraus folgt [30]), daß $H(D)\,f(x)$ in jedem unbegrenzten Intervall, das den Punkt $x = 0$ nicht enthält, nach Division durch ein x^k absolut integrierbar ist d. h., daß $H(D)\,f(x)$ wieder in der Klasse $\mathfrak{R}$ enthalten ist.

Auch $\dfrac{1}{(D-s)^n}\, f(x)$ $(n \geqq 1$ ganz, $\Re s \neq 0$ [33]$))$ stellt eine Funk-

[33]) Der Fall $\Re s = 0$ wird in § 5, Beispiel 6 betrachtet werden.

tion aus $\mathfrak{K}$ dar; denn in Beispiel 5 wird z. B. für $\Re s < 0$

$$\frac{1}{(D-s)^n} f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi \, \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} e^{s(x-\xi)}\, d\xi$$

gezeigt werden, und diese Funktion stellt auch eine Funktion aus $\mathfrak{K}$ dar [30]).

Satz 9 [34]**:** Ist $H(D)$ ein W-Operator, $H(iu)$ ohne Nullstellen auf der imaginären Achse und beliebig oft differenzierbar für alle reellen u und gehört weiter mit $f(x)$ auch $H(D)f(x)$ zu $\mathfrak{K}$, so ist $\frac{1}{H(D)} = H^{-1}(D)$ ein zu $H(D)$ inverser Operator, d. h. es ist

$$H^{-1}(D)\,[H(D)\,f(x)] = f(x).$$

Beweis: Da $H(z)$ auf imaginären Achse keine Nullstellen besitzt, existiert für alle $\lambda > 0$

$$H^{-1}(D_\lambda)\,[H(D)\,f(x)]$$

und man findet, da auch wie in Satz 8 die folgenden Umformungen durchführbar sind

$$\begin{aligned} &H^{-1}(D_\lambda)\,[H(D)\,f(x)] \\ &\quad = \int d\xi \left[\text{l. m.}_{\mu\to\infty} \int f(\eta)\, d\eta \, \frac{1}{2\pi} \int F_\mu(v)\, H(-iv)\, e^{iv(\eta-\xi)}\, dv \right] \\ &\qquad \cdot \frac{1}{2\pi} \int \frac{F_\lambda(u)}{H(-iu)} e^{iu(\xi-x)}\, du \\ &\quad = \lim_{\mu\to\infty} \int f(\eta)\, d\eta \, \frac{1}{2\pi} \int \frac{F_\lambda(u)\, e^{-iux}}{H(-iu)} \left(F_\mu(u)\, H(-iu)\, e^{iu\eta} \right) du \\ &\quad = f_\lambda(x). \end{aligned}$$

Es stellt also $H^{-1}(D)$ nach Satz 1 und Definition 2 einen zu $H(D)$ gehörigen inversen Operator dar.

Es sollen nun noch einige besondere W-Operatoren angegeben werden.

Beispiel 1: Nach Satz 5 ist jede Konstante c ein W-Operator; wird sie als Operator betrachtet, so ist [35]) für jede Funktion $f(x)$

[34]) Vgl. Wiener (1), 572—574.

[35]) Die Gleichheit ist hier und an den entsprechenden anderen Stellen als Aequivalenz aufzufassen (vgl. Definition 2).

aus $\mathfrak{K}$ nach Satz 1

$$c\,[f(x)] = c\,f(x)\,.$$

Beispiel 2: Ist n eine natürliche Zahl, so ist D^n ein W-Operator, allerdings nicht für die ganze Klasse der zulässigen Funktionen, aber sicher für die Funktionen $f(x)$, die n-mal differenzierbar sind und deren n-te Ableitung eine Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$ darstellt, und zwar ist dann

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x)\,.$$

Denn nach Satz 3 ist

$$(D_\lambda)^n f(x) = \int f^{(n)}(\xi)\,\Psi(\xi - x\,,\,\lambda)\,d\xi = (f^{(n)}(x))_\lambda\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung auf Grund des Satzes 1 und der Definition 2.

Allgemeiner gilt unter den obigen Voraussetzungen

$$[H(D)\,D^n]\,f(x) = H(D)\,D^n f(x) = H(D)\,f^{(n)}(x)\,; \tag{36}$$

denn nach Satz 3 ist

$$[H(D_\lambda)\,(D_\lambda)^n]\,f(x) = H(D_\lambda)\,f^{(n)}(x)\,.$$

Daher folgt aus Definition 2

$$[H(D)\,D^n]\,f(x) = \lim_{\lambda \to \infty}\,[H(D_\lambda)\,(D_\lambda)^n]\,f(x)$$
$$= H(D)\,f^{(n)}(x) = H(D)\,[D^n f(x)]\,.$$

Beispiel 3: Bedeutet n eine natürliche, s eine beliebige komplexe Zahl mit nicht verschwindendem Realteil[33]) und $f(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{K}$, so gilt[36])

$$\frac{1}{(D-s)^n} f(x) = \begin{cases} -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{s(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi & \text{falls } \Re\, s > 0 \\ \int_{-\infty}^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{s(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi & \text{„ } \Re\, s < 0\,; \end{cases} \tag{37}$$

[36]) Wir haben damit mit dem Ansatz von Herrn Wiener auf funktionentheoretischem Weg den Wert des Operators $\frac{1}{(D-s)^n}$, wenn dieser auf eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{K}$ angewendet wird, bestimmt. Die Formeln (37) stimmen formal genau mit bekannten, z. B. bei Kamke (S. 258, Satz 4 und 5) vorkommenden[33]) überein, wenn dort nur für x_0 das Symbol $+\infty$ bezw. $-\infty$ gesetzt wird, je nachdem $\Re\, s > 0$ bezw. $\Re\, s < 0$ ist (Konvergenz des Integrals!). Inhaltlich aber bedeuten sie — was die Eigenschaften der Funktion $f(x)$ anlangt — eine Verallgemeinerung.

denn nach Satz 6 ist

$$\frac{1}{(D-s)^n} f(x) = \int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{iu(\xi - x)}}{(-iu-s)^n}\, du$$

und daraus folgt, da nach Satz 7

$$\int \frac{e^{iu(\xi-x)}}{(-iu-s)^n}\, du = \begin{cases} -2\pi \operatorname*{Res}_{\Re z > 0} \dfrac{e^{-(\xi-x)z}}{(z-s)^n} & \text{falls } \xi - x < 0 \\ 2\pi \operatorname*{Res}_{\Re z < 0} \dfrac{e^{-(\xi-x)z}}{(z-s)^n} & \text{„ } \xi - x > 0 \end{cases}$$

ist, die Behauptung z. B. für $\Re s > 0$ aus

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\Re z > 0 \\ \Re z < 0}} \frac{e^{-(\xi-x)z}}{(z-s)^n} \Bigg\} = \begin{cases} \dfrac{[-(\xi-x)]^{n-1} e^{-s(\xi-x)}}{(n-1)!} & \text{falls } \xi - x < 0 \\ 0 & \text{„ } \xi - x > 0. \end{cases}$$

Beispiel 4: Für reelles c ist e^{cD} ein W-Operator[37]) und es gilt

$$e^{cD} f(x) = f(x+c).$$

Da nämlich e^{cD_λ} nach § 2 für alle $\lambda > 0$ ein unvollständiger W-Operator ist, gilt für jedes $\lambda > 0$ nach (11)

$$\begin{aligned} e^{cD_\lambda} f(x) &= \int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, e^{-icu}\, e^{iu(\xi-x)}\, du \\ &= \int f(\xi + c)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\, e^{iu(\xi-x)}\, du \\ &= f_\lambda(x+c), \end{aligned}$$

also nach Satz 1

$$\text{l. m.}_{\lambda \to \infty} e^{cD_\lambda} f(x) = f(x+c).$$

Beispiel 5: e^{cD^2} ist für $c > 0$ ein W-Operator nach Satz 5 und es folgt für eine beliebige Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{R}$ nach Satz 6

$$e^{cD^2} f(x) = \int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int e^{-cu^2} e^{iu(\xi-x)}\, du \tag{38}$$

und das ist[38])

$$e^{cD^2} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c}} \int f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4c}}\, d\xi. \tag{39}$$

[37]) Vgl. Wiener (1), 569.

[38]) Bochner, 57. Die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes führt bekanntlich etwas rascher zum Ziel.

Außerdem folgt aus (38), da sich auch hier die in Satz 2 angeführten Schlüsse anwenden lassen,

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(e^{c D^2} f(x)\right) = \int f(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{2\pi} \int (-u^2)\, e^{-c u^2}\, e^{iu(\xi - x)}\, du$$

und daraus ergibt sich nach Satz 6

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(e^{c D^2} f(x)\right) = D^2\, e^{c D^2} f(x). \tag{40}$$

Hiermit können wir zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung gelangen. Die Differentialgleichung

$$z_t(x, t) = \alpha_2\, z_{xx}(x, t) \qquad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0)$$

kann nämlich in der Gestalt

$$z_t(x, t) = \alpha^2 D^2 z(x, t) \qquad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

geschrieben werden. Nach (40) ist eine Lösung

$$z = e^{t \alpha^2 D^2} g(x),$$

wo $g(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$ ist; es ist dann offenbar $z(x, o) = g(x)$ und nach (39)

$$z(x, t) = e^{t \alpha^2 D^2} g(x) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int g(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4 \alpha^2 t}}\, d\xi \tag{41}$$

die bekannte Lösung der Wärmeleitungsgleichung [39]).

§ 5. **Verallgemeinerte Wienersche Operatoren** [40]).

In diesem Abschnitt werden wir uns der Einfachheit halber nur mit Operatoren $H(D)$ beschäftigen, deren Operatorfunktionen $H(z)$ (evtl. mehrdeutige) analytische Funktionen darstellen und das in Satz 5 Voraussetzung c) und d) geforderte infinitäre Verhalten besitzen. Damit erfaßt man gerade die in der Anwendung wichtigen Fälle, die sich dann meist auch sehr einfach mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewältigen lassen.

1) Liegen keine singulären Stellen der mehrdeutigen analytischen Funktion $H(z)$ auf der imaginären Achse, so macht die

[39]) Vgl. z. B. Horn, 155ff. Dort und ebenso bei anderen Darstellungen werden für die Funktion $g(x)$ wesentlich engere Voraussetzungen gefordert.

[40]) Vgl. Wiener (1), 572—579.

Definition von $H(D)f(x)$ keine Schwierigkeiten, wenn nur der betreffende Zweig der Funktion $H(z)$ auf der imaginären Achse das in Satz 5 geforderte infinitäre Verhalten besitzt. Denn schreibt man einen Wert der Funktion $H(z)$ an einer Stelle z_0 auf der imaginären Achse beliebig vor und verfolgt man dann die Werte der Funktion $H(z)$ für den Integrationsweg $(i\lambda, \ldots, -i\lambda)$ auf dem zugehörigen Blatt der Riemannschen Fläche, auf der der Wertevorrat der analytischen Funktion ja eindeutig wird, so hat das Integral

$$(42) \qquad H^*(D_\lambda)f(x) = \int f(\xi)\,d\xi \frac{1}{2\pi} \int F_\lambda(u)\,H^*(-iu)\,e^{iu(\xi-x)}\,du$$

einen eindeutig definierten Sinn, und man setzt (zur Existenz vgl. Satz 5)

$$H^*(D)f(x) = \underset{\lambda\to\infty}{\text{l. m.}}\; H^*(D_\lambda)f(x).$$

2) Liegt (genau) eine singuläre Stelle der (evtl. mehrdeutigen) analytischen Funktion $H(z)$ auf der imaginären Achse — etwa an der Stelle $z=0$ —, so kann dem Integral (42) (vgl. Satz 10) erst dann ein Sinn beigelegt werden, wenn die Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{R}$ sogar entweder für $x\to-\infty$ bezw. $x\to+\infty$ exponentiell von irgend einer Ordnung verschwindet[41]). Die kritische Stelle $z=0$ wird dann, wie das in der Funktionentheorie üblich ist, entweder durch einen (genügend kleinen) Halbkreis vom Radius r in der oberen Halbebene der z-Ebene, oder durch einen solchen in der unteren Halbebene umgangen. Entsprechend diesen beiden Wegen $\mathfrak{C}$ wird der unvollständige erweiterte Wienersche Operator

$$(43) \qquad \underset{\sim\!\!\rightarrow}{H^*(D_\lambda)}f(x) = \int f(\xi)\,d\xi \frac{1}{2\pi} \underset{\sim\!\!\rightarrow}{\mathfrak{C}\int} F_\lambda(z)\,H^*(-iz)\,e^{iz(\xi-x)}\,dz$$

bezw.

$$(44) \qquad \underset{\sim\!\!\rightarrow}{H^*(D_\lambda)}f(x) = \int f(\xi)\,d\xi \frac{1}{2\pi} \underset{\sim\!\!\rightarrow}{\mathfrak{C}\int} F_\lambda(z)\,H^*(-iz)\,e^{iz(\xi-x)}\,dz$$

gesetzt[42]), dabei soll $F_\lambda(z)\equiv 1$ in $|z|<r$ $(0<r<\lambda)$ sein.

[41]) Diese Voraussetzung ist bei den Anwendungen (vgl. Einschaltvorgänge in der Elektrotechnik) meistens erfüllt.

[42]) Die Ausdrücke (43) und (44) sind nach dem Cauchyschen Integralsatz für alle hinreichend kleinen Kreise von der Größe des Halbkreises unabhängig.

Mit Hilfe dieser Funktion (43) bezw. (44) wird der „hintere“ bezw. „vordere“ erweiterte Wienersche Operator definiert.

Definition 3: Ist $H^*(z)$ der Hauptwert der abgesehen von der Stelle $z=0$ regulären (evtl. mehrdeutigen) Funktion $H(z)$ [43]) und ist, je nachdem die Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{R}$ sogar für $x\to-\infty$ bezw. $x\to+\infty$ exponentiell verschwindet, $\underset{\frown}{H^*(D_\lambda)}f(x)$ bezw. $\underset{\frown}{H^*(D_\lambda)}f(x)$ über jedes beliebige endliche Intervall im quadratischen Mittel konvergent, so heißt $H(D)$ ein verallgemeinerter Wienerscher Operator und es wird gesetzt (vgl. Definition 2) der hintere bezw. vordere Hauptwert [43])

$$\underset{\frown}{H^*(D)}f(x)=\operatorname*{l.\,m.}_{\lambda\to\infty}\underset{\frown}{H^*(D_\lambda)}f(x)$$

bezw.

$$\underset{\frown}{H^*(D)}f(x)=\operatorname*{l.\,m.}_{\lambda\to\infty}\underset{\frown}{H^*(D_\lambda)}f(x).$$

In der Anwendung (Einschaltvorgänge in der Elektrotechnik) spielt besonders der hintere Hauptwert eine Rolle. Deshalb wird es sich in Satz 10 und in den Beispielen 6 und 7 nur um den hinteren Hauptwert handeln [43]).

Satz 10: Ist

a) $f(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{R}$, die sogar für $x\to-\infty$ wie e^{qx} $(q>0)$ verschwindet,

b) $H(z)$ eine in der ganzen z-Ebene (evtl. mehrdeutige) analytische Funktion, die auf der imaginären Achse nur in $z=0$ eine singuläre Stelle hat,

c) und erfüllt der Zweig [43]) $H^*(z)$ der analytischen Funktion $H(z)$ die Voraussetzungen c) und d) zu Satz 5 für $u\to\infty$ $(z=iu)$,

so existiert [44]) das Integral (43) bei festem $\lambda>0$ gleichmäßig für alle x eines beschränkten Intervalls, und die Funktionenfolge $\underset{\frown}{H^*(D_\lambda)}f(x)$ ist über jedes endliche Intervall im quadratischen Mittel konvergent.

Beweis: Die Existenz des Integrals (43) ergibt sich fast genau so wie die entsprechende Behauptung in Satz 2. Die einzige

[43]) Handelt es sich an der Stelle $z=0$ nur um einen Pol, so ist die Funktion $H(z)$ eindeutig. Es kommt dann nur ein vorderer und ein hinterer Wert in Frage.

[44]) Die Existenz wäre schon durch Voraussetzung b) für jedes $\lambda>0$ gesichert.

wesentliche Änderung tritt dadurch ein, daß bei dem jetzigen Integrationsweg die Funktion $e^{iz(\xi-x)}$ längs des Halbkreises $|z|=r$, $\Re z \geqq 0$ statt längs der Verbindungslinie seiner Endpunkte abzuschätzen ist. Auf diesem Halbkreis gilt

$$\begin{aligned} |e^{iz(\xi-x)}| &= |e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\xi-x)}| \\ &= e^{-r(\xi-x)\sin\varphi} \leqq \begin{cases} e^{-r(\xi-x)} & \text{für } \xi - x < 0 \\ 1 & \text{für } \xi - x > 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Ebenso gelingt der Beweis der Konvergenz der Funktionenfolge $H^*(D_\lambda) f(x)$ mit denselben Hilfsmitteln wie in Satz 5.

Zum Abschluß sollen noch zwei Beispiele gegeben werden, von denen das eine (Beispiel 6) mit Hilfe des Residuensatzes leicht erledigt wird, während für das andere (Beispiel 7), welches das erstere enthält, die Darstellung der reziproken Γ-Funktion durch ein Schleifenintegral herangezogen wird.

Beispiel 6: Wird der Operator $\frac{1}{(D-i\tau)^n}$ (τ beliebig reell, $n \geqq 1$ ganz) auf die Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{R}$ angewendet, die für $x \to -\infty$ sogar exponentiell verschwindet, so ist der hintere Wert[45]) des Operators

$$(45) \qquad \underset{\frown\!\!\rightarrow}{\frac{1}{(D-i\tau)^n}} f(x) = \int^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} e^{i\tau(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi\,.$$

Beweis: Nach Satz 10 ist

$$\underset{\frown\!\!\rightarrow}{\frac{1}{(D-i\tau)^n}} f(x) = \underset{\lambda\to\infty}{\text{l. m.}} \int f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi} \underset{\frown\!\!\rightarrow}{\mathfrak{S}} \int \frac{F_\lambda(z)\, e^{iz(\xi-x)}\, dz}{(-iz-i\tau)^n}\,.$$

---

[45]) Die Gleichung (45), die formal mit der zweiten in (37) übereinstimmt, macht uns plausibel, warum die Einschränkung über die Größenordnung der Funktion $f(x)$ gemacht werden muß, wenn eine Singularität auf dem Integrationsweg liegt. Vgl. auch die Ansätze von Riemann und Fantappiè ($\tau = 0$): Ist $f(x)$ in $x_1 < x < x_2$ ($x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$ zugelassen) stetig und $x_1 < x_0 < x_2$, so setzt Riemann (S. 553 ff)

$$J^n f(x) = J(J^{n-1} f(x)) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi)\, d\xi\,.$$

Das ist also das obige $D^{-n} f$.

Nun ergibt sich nach dem Residuensatz[46]) (vgl. Satz 7)

$$(46)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{C}\!\!\int_{\rightsquigarrow}\frac{F_\lambda(z)\,e^{iz(\xi-x)}\,dz}{(-iz-i\tau)^n}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{C}\!\!\int_{\rightsquigarrow}\frac{e^{iz(\xi-x)}\,dz}{(-iz-i\tau)^n}=\begin{cases}0 & \text{für } \xi-x>0\\ \dfrac{e^{i\tau(x-\xi)}(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{„ } \xi-x<0\end{cases}$$

und daraus folgt die Behauptung (45) entsprechend wie die in Satz 6.

Beispiel 7: Sind τ und $\alpha>\frac{1}{2}$ beliebige reelle Zahlen und ist $f(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{R}$, die für $x\to-\infty$ sogar exponentiell verschwindet, so ist der hintere Hauptwert des Operators $\dfrac{1}{(D-i\tau)^\alpha}$ gegeben durch[45])

$$(47)\qquad \frac{1}{*(D-i\tau)^\alpha}f(x)=\int^{x}\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,e^{i\tau(x-\xi)}\,f(\xi)\,d\xi$$

$$\left(*(-iu-i\tau)^\alpha=e^{\alpha\,\mathrm{Log}\,(-iu-i\tau)}\right).$$

Beweis: Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist (vgl. Satz 7) für $\xi-x<0$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{C}\!\!\int_{\rightsquigarrow}\frac{F_\lambda(z)\,e^{iz(\xi-x)}\,dz}{(-iu-i\tau)^\alpha}=0.$$

Außerdem ergibt sich aus der Darstellung der reziproken Γ-Funktion durch ein Schleifenintegral[47]) unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integralsatzes für $\xi-x>0$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{C}\!\!\int_{\rightsquigarrow}\frac{F_\lambda(z)\,e^{iz(\xi-x)}\,dz}{*(-iz-i\tau)^\alpha}=e^{i\tau(\xi-x)}(x-\xi)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

und daraus folgt die Behauptung (47) ebenso wie die entsprechende Behauptung (45).

---

[46]) $F_\lambda(z)$ ist in $|z+\tau|\leqq\lambda$ regulär, wenn $F_\lambda(z)=1$ in $|z+\tau|\leqq\lambda$ $(0<r<\lambda)$ ist.

[47]) Knopp II, 56, 4.

Literaturverzeichnis.

E. J. Berg, Rechnen mit Operatoren nach O. Heaviside (deutsch von Garmisch-Tropper, Oldenburg 1932).

S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932.

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 2. Aufl., Leipzig 1927.

G. Doetsch, (1) Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36 (1927), 1—30.

(2) Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentionalgleichungen und die symbolische Methode, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 43 (1933), 238—251.

L. Fantappiè, La giustificazione del calcolo simbolico ..... Memorie della Reale Accademia d'Italia. Classe die Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali I (1930), 3—35.

E. W. Hobson, The theory of funktions of a real variable, I, II, 2. Aufl., Cambridge 1927.

J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, Berlin 1929.

E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930.

K. Knopp, Funktionentheorie II, 2. Aufl., Leipzig 1926.

J. London, Über Doppelfolgen und Doppelreihen. Math. Annalen 53 (1900), 322—370.

B. Riemann, Gesammelte Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892.

E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford 1932.

N. Wiener, (1) The Operational Calculus, Math. Annalen 95 (1926), 557—584.

(2) The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933.

Lebenslauf.

Am 29. März 1910 wurde ich, Albert Weible, als Sohn des Landwirts Karl Weible und seiner Ehefrau Marie, geb. Maier in Nürtingen geboren. Nach 7jährigem Besuch der Volksschule trat ich in das Lehrerseminar in Nürtingen ein und legte dort im Frühjahr 1929 die Reifeprüfung und ein Jahr später die erste Volksschuldienstprüfung ab. Anschließend studierte ich in Tübingen vom Sommersemester 1930 bis Sommersemester 1934 Mathematik und Physik. Im Frühjahr 1935 bestand ich die erste und ein Jahr später die zweite Dienstprüfung für das Höhere Lehramt. Seit August 1936 bin ich am Flugtechnischen Institut der Technischen Hochschule Stuttgart als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.

Meine akademischen Lehrer waren vor allem die Herren: Prof. Dr. Geiger, Prof. Dr. Kamke, Prof. Dr. Knopp, Prof. Dr. K. Kommerell, Prof. Dr. Schönhardt, denen ich sehr zu Dank verpflichtet bin. Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. Kamke für die Anregung zu dieser Arbeit und die rege Anteilnahme an ihr.